Máximos y mínimos sin cálculo aplicado a la economía

LUIS MIGUEL CABRERA G*

RESUMEN

El artículo muestra los problemas más sencillos de "Máximos y Mínimos sin Cálculo".

Este tipo de problemas se presentan en ingeniería, la industria, la administración y la vida cotidiana, con una característica en común, no obstante sus diferencias. Esta característica, consiste en determinar la forma de lograr un efecto óptimo mediante la selección de una entre varias posibilidades.

Estos problemas se resuelven por medio de métodos de cálculo diferencial, pero pueden ser calculados únicamente, con la ayuda del álgebra elemental. Este es, precisamente el contenido del artículo, que propone métodos más sencillos, sin la aplicación del cálculo diferencial.

1. SUMAS Y PRODUCTOS

Consideremos el problema de hallar dos números cuya suma sea 60 y cuyo producto sea lo mayor posible. La respuesta es 30 y 30. Cualquier otro par tal como 20 y 40 tienen un producto menor. Si preguntamos por tres números cuya suma sea 60 y que tengan el mayor producto posible, encontramos que tales números son 20, 20 y 20. Para cuatro números positivos cuya suma sea 60, el mayor producto ocurre cuando los números son 15, 15, 15 y 15. La idea parece ser clara: hacer iguales los números. Este es el tema central de este artículo y la idea análoga con sumas y productos invertidos es otro concepto básico.

SUMAS Y PRODUCTOS INVERTIDOS

La pregunta ahora es hallar dos números cuyo producto sea 64, y cuya suma sea un mínimo. La respuesta es 8 y 8. Un momento de reflexión revela que no se puede obtener un máximo para la suma, ya que la suma puede hacerse tan grande como se quiera. Por ejemplo, los números 64.000 y 0.001 tienen como producto 64 y una suma modestamente grande.

Una extensión natural es preguntar por tres números positivos con producto 64 y cuya suma sea mínima. La respuesta es 4, 4 y 4.

2. CUALQUIER CUADRADO ES POSITIVO O CERO

Se puede demostrar fácilmente que el cuadrado

* Docente de Matemáticas EAN

de cualquier número real es positivo o cero. Más aún, el cuadrado es cero Sii el número es cero. De estos conceptos sencillos algunos resultados básicos se obtienen rápidamente.

Teorema 2.1

Para cualquier constante C, el máximo valor de

$$CX - X^2$$

para todo

$$X \text{ real es } \frac{C^2}{4},$$

que ocurre Sii

$$X = \frac{C}{2}$$

Demostración

Esto puede verse escribiendo

$$CX - X^2 = \frac{C^2}{4} - (X - \frac{C}{2})^2 \qquad (1)$$

La cual es una identidad fácilmente verificable. Puesto

$$(X - \frac{C}{2})^2$$

es positivo o cero, el mayor valor de

$$CX - X^2 \text{ es } C^2/4,$$

que se obtiene únicamente en el caso

$$X = C/2.$$

No existe un mínimo valor de

$$CX - X^2,$$

y que esta es una parábola que abre hacia abajo.

El teorema podría haber sido enunciado con un coeficiente más general para X, pero tal caso es fácilmente reducible a

$$CX - X^2.$$

Por ejemplo, hallar el mayor valor de

$$24X - 4X^2,$$

escribimos esto como

$$4(6X - X^2)$$

y aplicamos el teorema se observa que el máximo ocurre en

$$X = 3.$$

Así el máximo es 36. Además si se adiciona una constante se puede determinar fácilmente. Para hallar el máximo valor de

$$50 + 24X - 4X^2,$$

ignoramos la constante 50 por un momento y miramos el mayor valor de

$$24X - X^2,$$

como se anotó antes, el mayor valor es 36, así el máximo es 86.

Otra forma de generalizar el teorema 2.1 es enunciándolo de la forma:

El trinomio cuadrático

$$Y = aX^2 + bX + c$$

Tiene un valor extremo, que toma en

$$X = \frac{-b}{2a}$$

Este valor es un mínimo si $a > o$ y un máximo Si $a < 0$. Si existe Y_{min} no existe $Y_{máx}$ y recíprocamente.

Colorario 1

El mínimo valor de

$$X^2 - CX \text{ es } \frac{-C^2}{4},$$

que ocurre Sii

$$X = C/2.$$

Esto se debe a que

$$X^2 - CX$$

es el negativo de

$$CX - X^2,$$

así que el mayor valor de

$$CX - X^2$$

y el menor valor de

$$X^2 - CX$$

ocurre Sii

$$X = C/2.$$

Colorario 2

Si dos variables X Y satisfacen

$$X + Y = C,$$

producto XY es un máximo Sii los números son iguales, es decir,

$$X = Y = C/2.$$

Demostración

Haciendo

$$Y = C - X,$$

observamos que

$$XY = CX - X^2,$$

luego el máximo ocurre cuando

$$X = C/2$$

y cuando

$$Y = C/2,$$

por lo tanto, tenemos que el máximo ocurre cuando

$$X = Y = C/2.$$

Colorario 3

Si dos variables positivas satisfacen

$$XY = C,$$

donde C es una constante positiva, su suma

$$X + Y$$

es un mínimo Sii

$$X = Y = \sqrt{C}.$$

Demostración

$$X + Y = X + \frac{C}{X} = (\sqrt{X} - \frac{\sqrt{C}}{\sqrt{X}}) + 2\sqrt{C} \qquad (2)$$

El mínimo valor de

$$X + Y$$

ocurre Si el cuadrado es cero, es decir,

$$\sqrt{X} = \frac{\sqrt{C}}{\sqrt{X}}$$

lo cual nos da

$$X = \sqrt{C}.$$

Se sigue entonces que

$$Y = \sqrt{C}.$$

Ejemplo 2.1

Consideremos la suma de cualquier número real positivo y su recíproco. Probar que el menor valor de esta suma es 2.

Solución

Designando a X como el número real positivo, queremos minimizar

$$X + \frac{1}{X}.$$

Esta es la suma de dos términos cuyo producto es una constante

$$(X \cdot \frac{1}{X} = 1);$$

así aplicamos el colorario 3. La suma es un mínimo cuando

$$X \text{ y } \frac{1}{X}$$

son iguales, de lo cual tenemos:

$$X = \frac{1}{X} \Rightarrow X^2 = 1 \Rightarrow \;\Longrightarrow X = 1$$

Donde se descarta la solución

$$X = -1$$

ya que X es positivo. Así el mínimo de

$$X + \frac{1}{X} \quad \text{es } 2.$$

Ejemplo 2.2

Sean a y b constantes positivas. Hallar el menor valor de

$$ax + \frac{b}{X}$$

para todos los números positivos X.

Solución

De nuevo tenemos una suma de dos términos cuyo producto es una constante

$$(ax \cdot \frac{b}{X} = ab);$$

así podemos aplicar el colorario 3. La suma es un mínimo si los términos son iguales, es decir:

$$ax = \frac{b}{X} \Rightarrow X^2 = \frac{b}{a} \Rightarrow X = \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}$$

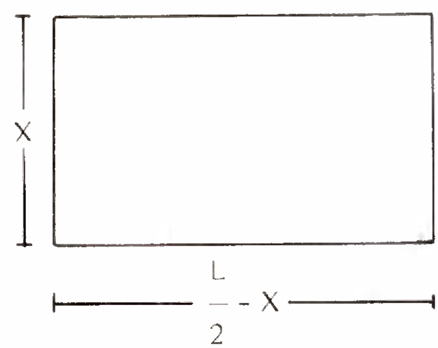
Por lo tanto el mínimo valor de la suma es

$$2\sqrt{a\ b}$$

3. APLICACIONES GEOMETRICAS Y FISICAS

Ejemplo 3.1

Se tiene un alambre de longitud L. Debe doblarse este alambre para formar un rectángulo que encierre la mayor área posible. Hallar las dimensiones del rectángulo.



Solución

Denotando por X uno de los lados, el otro lado es

$$\frac{L}{2} - X$$

y el área es

$$A = X\left(\frac{L}{2} - X\right)$$

Este es el producto de dos factores cuya suma es constante

$$\left(X + \frac{L}{2} - X = \frac{L}{2}\right),$$

por el contrario 2, la ecuación (1) tiene su valor máximo cuando los dos factores sean iguales, es decir:

$$X = \frac{L}{2} - X \implies 2X = \frac{L}{2} \implies X = \frac{L}{4}$$

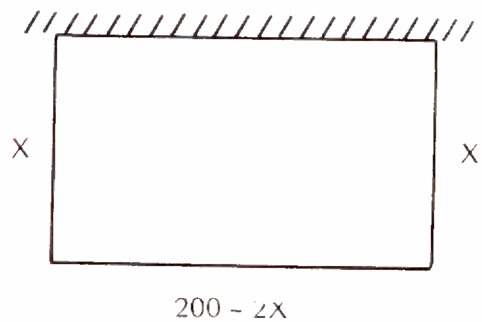
El otro lado es

$$\frac{L}{2} - X = \frac{L}{2} - \frac{L}{4} = \frac{L}{4}$$

Es decir, el rectángulo resulta ser un CUADRADO.

Ejemplo 3.2

De un material disponible puede construirse una Cerca de 200 m de larga. Con esta Cerca se quiere rodear un terreno rectangular con la mayor área posible, usando la pared de una fábrica como uno de los lados del terreno. Hallar las dimensiones del terreno.



Solución

Denotando por X la longitud de uno de los lados tenemos que el tercer lado es

$$200 - 2X$$

y el área es:

$$A = X\,(200 - 2X) \qquad (1)$$

Esta ecuación es equivalente a

$$A = 2\,(100X - X^2)$$

y por el TRM 2.1 el máximo de

$$(100X - X^2)$$

ocurre si

$$X = \frac{100}{2} \implies X = 50$$

Por lo tanto, tiene las dimensiones 50 en un lado y 100 en el otro.

Observación

Si se hubiese aplicado el Colorario 2, no se hubiese tenido éxito pues la suma de los factores

$$X \quad y \quad 200 - 2X$$

no es constante. Sin embargo, podemos aplicar el Colorario 2 haciendo el siguiente cambio:

$$S = 2A = 2X\,(200 - 2X)$$

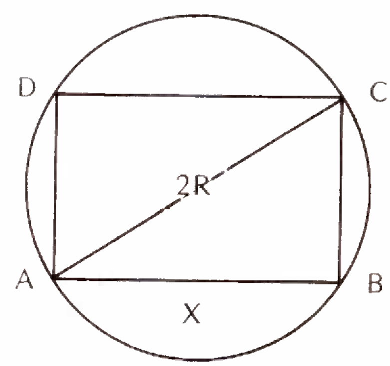
Y este es el producto de dos factores cuya suma es constante, por lo tanto, el máximo ocurre cuando los dos factores son iguales, es decir,

$$2X = 200 - 2X \implies X = 50$$

Que coincide con el resultado anteriormente hallado.

Ejemplo 3.3

En un círculo dado debe inscribirse un rectángulo de área máxima. Hallar las dimensiones del rectángulo.



Solución

Aplicando el Teorema de Pitágoras tenemos:

$$Bc = [4R^2 - X^2]^{1/2} \qquad \text{y el área es:}$$

$$A = X\,[4R^2 - X^2]^{1/2} \qquad (1)$$

Como se observa para este caso no podemos aplicar ningún Colorario pero haciendo el siguiente truco tenemos:

$$Y = A^2 \implies Y = X^2\,(4R^2 - X^2)$$

Este es el producto de dos factores cuya suma es Constante, por lo tanto, el máximo ocurre si los factores son iguales, es decir:

$$X^2 = 4R^2 - X^2 \implies X = \sqrt{2}\,R$$

Y el otro lado del rectángulo es:

$$BC = [4R^2 - X^2]^{1/2} \implies BC = \sqrt{2}\,R$$
$$= \sqrt{2}\,R$$

Luego, el rectángulo buscado es un Cuadrado.

Ejemplo 3.4

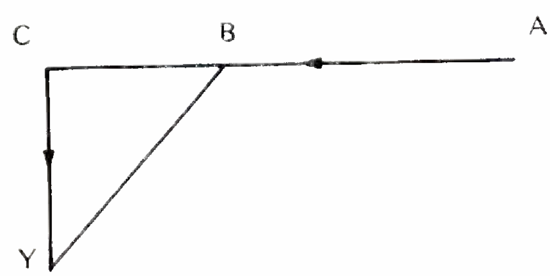
Un buque de Vapor y un Yate salen al mismo tiempo de los puntos A y C en las direcciones indicadas (ver figura). Sus velocidades son

$$V_B = 40 \text{ km/h}$$

y

$$V_Y = 16 \text{ km/h}$$

respectivamente. Después de cuánto tiempo la distancia entre los dos es mínima, si AC = 145 km?



Solución

Después de transcurridos T horas de viaje, las posiciones del buque y el yate son B y Y.

Entonces

$$AB = 40\,t \text{ km},$$

$$CY = 16\,t \text{ km}$$

Aplicando el Teorema de Pitágoras al $\triangle CBY$ tenemos:

$$BY = [CY^2 + CB^2]^{1/2} \implies$$

$$BY = [(16t)^2 + (145 - 40t)^2]^{1/2} \implies$$

$$BY = [1856t^2 - 11600t + 21025]^{1/2}$$

Esta raíz cuadrada tiene su mínimo en el máximo valor de t para el cual la expresión Subradical

$$X = 1856t^2 - 11600t + 21025$$

es mínima, es decir, por el TRM 2.1 tenemos:

$$t = \frac{-(-11600)}{2(1856)} \implies t = \frac{11600}{3712} \implies$$

$$t = \frac{25}{8} \implies t = 3\,\frac{1}{8} \text{ h}$$

Por lo tanto, el Vapor y el Yate quedan separados entre sí a la distancia más corta al cabo de 3 horas, 7 minutos y 30 segundos.

4. APLICACIONES A LA ECONOMIA

4.1 CONCEPTOS BASICOS

$p(x)$ denota el precio por unidad.

$R(x) = xp(x)$ denota el ingreso total.

$C(x)$ denota el Costo Total, el cual es la suma de un Costo Fijo (recursos de oficina, impuestos estatales, etc.) más un Costo Variable, que depende en forma directa del número de unidades producidas por ejemplo:

$$C(x) = 10.000 + 45x + 100\sqrt{x}$$

$$P(x) = R(x) - C(x) = xp(x) - C(x)$$

denota la utilidad total, la cual es la diferencia entre el ingreso total y el costo.

$\frac{dc}{dx}$ denota el Costo Marginal, el cual es el Costo Adicional cuando se aumenta ligeramente la producción.

$\frac{dp}{dx}$ denota el Precio Marginal

$\frac{dR}{dx}$ denota el Ingreso Marginal

$\frac{dP}{dx}$ denota la Utilidad Marginal

Ejemplo 4.1

Supongamos que

$$C(x) = 5 + 16x + 4x^2.$$

Encontrar el costo medio por unidad y el costo mínimo y evaluarlos cuando

$$xg = \$1000$$

Solución

$$\text{Costo Promedio: } \frac{C(x)}{x} = \frac{5 + 16x + 4x^2}{x}$$

Cuando

$$x = \$1000$$

el Costo Promedio es

$$\$4016{,}005$$

El Costo Mínimo se obtiene aplicando el TRM 2.1 es decir:

$$X = \frac{-16}{2(4)} = -2$$

Como las unidades producidas son números positivos, entonces la Compañía debe abandonar dicha producción, de lo contrario sus utilidades serán mínimas.

Ejemplo 4.2

Una Compañía estima que puede vender 1000 unidades por semana, si pone en \$3 dólares el precio unitario, pero que las Ventas Semanales subirían 100 unidades por cada 10 centavos que disminuya el precio. Si x es el número de unidades vendidas a la semana ($x > 1000$), encontrar:

a. La función precio, $p(x)$.

b. El número de unidades y el precio correspondiente que maximice el ingreso semanal.

c. El máximo ingreso semanal.

Solución

a. $$p(x) = 3(0{,}10)\frac{(x - 1000)}{100} = 4 - 0.0001x$$

b. $R(x) = xp(x) = 4x - 0.001x^2$

Por el TRM 2.1 el máximo ocurre cuando

$$x = \frac{-4}{2(-0.001)} = 2000$$

Es decir, cuando se venden 2000 unidades el ingreso es máximo, este corresponde a un precio unitario

$$p(2000) = \$2 \text{ dólares.}$$

c. El máximo ingreso semanal es

$$R(2000) = \$4000 \text{ dólares.}$$

Ejemplo 4.3

En la manufactura y venta de x unidades de cierta mercancía la función Precio p y la función Costo C (en dólares) están dados por:

$$p(x) = 5 - 0.002x$$

$$C(x) = 3 + 1.102x$$

Determinar el nivel de producción que produce la máxima utilidad total.

Solución

$$R(x) = xp(x) = 5x - 0.002x^2$$

$$P(x) = R(x) - C(x) = -3 + 3{,}9x - 0.002x^2$$

Por el TRM 2.1 la máxima utilidad ocurre cuando

$$x = \frac{-3.9}{2(-0.002)} = 975$$

La máxima utilidad es

$$P(975) = \$1898{,}25$$

Ejemplo 4.4

La Compañía XYZ fabrica sillas de mimbre. Con las máquinas actuales tiene una producción anual máxima de 500 unidades. Si fabrica x sillas, puede venderlas a un precio de

$$p(x) = 200 - 0{,}15x \text{ dólares}$$

cada una y tener un Costo Anual de

$$C(x) = 4000 + 6x - 0.001x^2 \text{ dólares.}$$

¿Qué nivel de producción maximiza la utilidad total al año?

Solución

$$R(x) = xP(x) = 200x - 0.15x^2$$

y

$$P(x) = R(x) - C(x) = 4000 + 194x - 0.149x^2$$

Por el TRM 2.1 la máxima utilidad se obtiene cuando:

$$x = \frac{-194}{2(-0.149)} = 651$$

Como la fábrica tiene un rango de producción de

$$0 \leqslant x \leqslant 500,$$

tenemos que descartar

$$x = 651,$$

por lo tanto los únicos puntos extremos son

$$0 \text{ y } 500.$$

Si el máximo es en 0, la Compañía debe abandonar el negocio cuanto antes. Pero no es así. El máximo ocurre en 500 y la utilidad máxima es

$$P(500) = \$55{,}750.$$

BIBLIOGRAFIA

DEMIDOVICH, B. "Problemas y Ejercicios de Análisis Matemático". Editorial Mir.

NATASON, I.P. "Problemas de Máximos y Mínimos". Editorial Limusa.

NIKOLSKI, S. "Elementos de Análisis Matemático". Editorial Mir.

NIVEN, Iván. "Maxima and Mínima Without Calculus".

PURCELL, Edwin. "Cálculo Diferencial". Cuarta Edición. P. 175-180.