

Actividad de estudio e investigación para la enseñanza de nociones de funciones

Alejandro Bernal Salazar¹
Universidad EAN
abernal2.d@universidadean.edu.co

Cómo citar este artículo: Bernal Salazar, A. (2018). Actividad de estudio e investigación para la enseñanza de nociones de funciones. *Revista Virtu@lmente*, 6(1), 27-47.

Fecha de recepción: 5 de marzo de 2018
Fecha de aprobación: 19 de junio de 2018

¹ Matemático de la Universidad Sergio Arboleda. Especialista en Matemática Aplicada y Magister en Docencia e Investigación Universitaria de la Universidad Sergio Arboleda.

RESUMEN

En este artículo se presentan algunos resultados parciales del diseño e implementación de una Actividad de Estudio e Investigación (AEI) con fundamento en la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD), realizada en un colegio distrital de Bogotá en noveno grado de secundaria. Se trata de un diseño cuyo objetivo educativo consistió en la introducción de la noción de función, mediante una aplicación en administración y economía, para de esta manera contribuir al propósito didáctico de matematizar las matemáticas, como herramienta que permite articular y dar sentido a la matemática escolar.

Palabras clave: Actividad de Estudio e Investigación (AEI); Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD); matemáticas; enseñanza de las matemáticas; matemática escolar.

Study and research activity for teaching the notion of functions

ABSTRACT

This article presents some partial results of the design and implementation of a Study and Research Activity (AEI by its abbreviation in Spanish) based on the Anthropological Theory of the Didactic (ATD), carried out in the ninth grade class of a district school in Bogotá. It is a design whose educational objective consisted in the introduction of the notion of functions, by means of its application in administration and economics, in order to contribute to the didactic purpose of mathematizing mathematics, as a tool that allows to articulate and give meaning to mathematics in schools.

Keywords: Study and Research Activity (AEI by its abbreviation in Spanish); Anthropological Theory of the Didactic (ATD); mathematics; mathematics instruction; mathematics in schools.

Activité d'étude et de recherche pour l'enseignement des notions de fonctions

RÉSUMÉ

Cet article présente les résultats partiels de la conception et de la mise en place d'une activité d'étude et de recherche (AEI) basée sur la théorie anthropologique de la didactique (TAD) menée dans une classe de troisième d'un collège de la ville de Bogotá. Il s'agit d'un projet dont l'objectif pédagogique consiste à introduire la notion de fonction par le biais d'une application de gestion et économie contribuant à la finalité didactique de la mathématisation des mathématiques comme un outil permettant d'articuler et de donner un sens à l'apprentissage des mathématiques au collège.

Mots clefs: Activité d'étude et d'investigation (AEI); théorie anthropologique de la didactique (TAD); mathématiques; enseignement des mathématiques; mathématiques scolaires.

Atividade de estudo e pesquisa para o ensino de noções de funções

RESUMO

Neste artigo apresentam-se alguns resultados parciais do desenho e implementação de uma Atividade de Estudo e Investigação (AEI) com fundamento na Teoria Antropológica do Didático (TAD), realizada em um colégio distrital de Bogotá na nona série. Trata-se de um desenho cujo objetivo educativo consistiu na introdução da noção de função, mediante uma aplicação em administração e economia, para desta maneira contribuir com o propósito didático de matematizar as matemáticas, como ferramenta que permita articular e dar sentido à matemática escolar.

Palavras-chave: atividade de Estudo e Investigação (AEI); Teoria Antropológica do Didático (TAD); matemática; ensino da matemática; matemática escolar.

1. Introducción

La educación matemática en la actualidad pasa por un problema que es apremiante en la mayoría de los países: es la pérdida de sentido de las matemáticas escolares, lo que Chevallard (2004, 2005, 2007) llama la *monumentalización de saberes* y Otero, M. R.; Fanaro, M.; Corica, A.; Llanos, V.; Sureda, P. y Parra, V. (2013) denominan un *estudio de un conjunto de obras muertas*, para referirse a que el estudiante pasa por el aula de clase y no le encuentra sentido a lo que el sistema educativo escolar le ofrece.

Lo anterior tiene manifestaciones como la falta de motivación de los estudiantes para estudiar matemáticas, aumento de la deserción escolar, disminución de las matemáticas en el currículo y el imaginario social de que las matemáticas son muy difíciles (Juárez y Limón, 2013). Esto en parte se debe a que los contenidos matemáticos se le entregan al estudiante de manera aislada y en ocasiones se pretende que no se usen las nuevas tecnologías de la información, en especial el uso de las calculadoras simbólicas y el software de algunos celulares.

Las propuestas de países europeos para la renovación de las metodologías educativas recomiendan aproximar al estudiante al ejercicio profesional, potenciando la dimensión práctica de la enseñanza: el saber hacer y el saber ser/estar (Serrano, 2013).

En estas propuestas se hace énfasis en aumentar el interés de los estudiantes por la investigación, que proporciona la oportunidad de desarrollar una gama de destrezas

complementarias y transdisciplinares. En ese sentido, se propone realizar una pequeña contribución al objetivo didáctico de matematizar las matemáticas como herramienta que permite articular y dar sentido a la matemática escolar; mediante el diseño e implementación de una Actividad de Estudio e Investigación (AEI) con el objetivo de introducir la noción de función, mediante una aplicación en administración y economía, que surge del contexto y vida real de los estudiantes del colegio distrital Friedrich Naumann.

2. El diseño curricular de matemática en la educación secundaria y la enseñanza de funciones

En el diseño curricular de matemática para la educación secundaria de la educación colombiana, se propone el estudio de funciones lineales y afines en octavo y noveno grado de secundaria, destinado a estudiantes entre los 13 y 16 años de edad (Ministerio de Educación Nacional - MEN, 2006).

En particular, en octavo una vez se han trabajado ecuaciones e inecuaciones de primer grado, se considera introducir el estudio de las funciones lineales, su representación y ecuaciones, por otro lado, en noveno grado se inicia el estudio de

la ecuación de la recta, rectas paralelas y perpendiculares y posteriormente sistemas de ecuaciones.

Usualmente estos planes de estudio no se realizan en su totalidad y quedan desarticulados con relación a las nociones que se estudian. En esta propuesta se propone el estudio de funciones y ecuaciones de manera paralela, y que el estudio de la factorización surja como una necesidad de encontrar por ejemplo los ceros de una función y se retome al año siguiente para reforzar el concepto de función y las técnicas y tecnologías estudiadas en el año anterior, para modificarlas y continuar en la elaboración de nuevas técnicas.

3. Marco teórico

Este trabajo toma como referencial teórico la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) y sus últimos desarrollos (Chevallard, 2007). El constructo teórico fundamental de la TAD, es la noción de praxeología u organización matemática (OM). Estas surgen como respuesta a una cuestión o conjunto de cuestiones problemáticas que se denominan cuestiones generatrices. Las praxeologías constan de dos niveles: el nivel de la praxis o del saber hacer, que engloba un cierto tipo de tareas, así como las técnicas para resolverlos; un segundo nivel del logos o del saber, en el que se sitúan los discursos que describen, explican y justifican las técnicas que se utilizan, estos reciben el nombre de tecnología. En el nivel del logos hay un segundo nivel de descripción-explicación-justificación, esto es el nivel tecnología de la tecnología, al cual se le llama teoría.

Además de las OM, se distinguen las formas de organizar la enseñanza escolar de la matemática, que se describen en términos de praxeologías didácticas. La atención de los muchos procesos que corresponden a la construcción matemática, permite identificar aspectos invariantes, momentos que estructuran cualquier proceso de elaboración matemática, independiente de sus características individuales, culturales, sociales, o de otra índole. Por lo que el proceso de estudio se sitúa en seis momentos didácticos:

- El momento del primer encuentro con un determinado tipo de tareas (T).
- El momento exploratorio que nos da la posibilidad de explorar una técnica potencialmente útil para resolver las tareas (T).
- El momento de construcción de un entorno tecnológico-teórico, que explica y justifica las técnicas puestas en funcionamiento y permite la producción de nuevas técnicas.
- El momento de trabajo de la técnica, que estimula la evolución de las técnicas existentes y la construcción de nuevas.
- El momento de la institucionalización, que determina y precisa aquellos elementos constituyentes de la organización matemática construida.
- El momento de la evaluación de la praxeología elaborada.

Atendiendo las líneas actuales de investigación que propone la TAD, se pretende introducir en los sistemas de enseñanza procesos de estudio funcionales, donde los saberes no sean monumentos que el profesor enseña a los estudiantes, sino herramientas materiales y conceptuales, útiles para estudiar y resolver situaciones problemáticas.

Las Actividades de Estudio e Investigación (AEI) surgen como modelo didáctico para abordar la problemática y superar la estructura clásica de la enseñanza de la matemática, que se caracteriza por la presentación de elementos tecnológicos-teóricos y luego tareas como medio para la aplicación de los primeros.

Una AEI es una organización didáctica donde el grupo, bajo la dirección de un profesor, hará estudiar, reconstruir y hacer accesible a los estudiantes una cierta Organización Matemática Local (OML), para ello es necesario iniciar una cuestión generatriz Q , cuyo estudio produzca la elaboración de una respuesta R , y esta contenga los elementos esenciales de la OML originaria.

Chevallard (1999) introdujo la distinción de diferentes tipos de OM, según el grado de complejidad de sus componentes:

- **Organizaciones Puntuales (OMP):** son generadas por lo que se considera en la institución como un único tipo de tarea, está definida a partir del bloque práctico-técnico.
- **Organizaciones Locales (OML):** resultado de integrar diversas praxeologías puntuales. Cada praxeología local se caracteriza por una tecnología que sirve para

justificar, explicar, relacionar entre sí y producir las técnicas de todas las praxeologías puntuales que la integran.

- **Organizaciones Regionales (OMR):** se alcanzan mediante la coordinación, articulación y posterior integración de diversas praxeologías locales a una teoría matemática en común.
- **Organizaciones Globales (OMG):** si al agregar varias praxeologías regionales a partir de la integración de diferentes teorías.

Así, las AEI constituyen un proceso de estudio praxeológico finalizado, pues se establece la condición de que R contenga los principales componentes de una OML previamente determinada y conocida de antemano por la institución escolar.

Una enseñanza por AEI permite iniciar a oponerse al problema de la monumentalización de los saberes y supone cambios a nivel de mesogénesis, topogénesis y cronogénesis (Chevallard, 1989, 2009b). Implica esencialmente el estudio de cuestiones suficientemente ricas, vivas y fecundas que provoquen en los estudiantes la necesidad de seguir aprendiendo, y que facilite abrir un proceso de investigación, que permita explorar, conjeturar y validar resultados.

4. Metodología

Se propone una investigación cualitativa, de corte exploratorio y descriptivo. Se presentan las características de un dispositivo didáctico diseñado en una pedagogía de AEI para la escuela secundaria, y se muestran algunos resultados de su implementación.

La AEI se construye a partir de una situación en la que se involucra el estudio de funciones polinómicas en particular las funciones afines y cuadráticas. Según el referencial teórico tomado, como actividad previa al diseño de la AEI, es necesario elaborar un Modelo Epistemológico de Referencia MER (Fonseca, Gascón y Oliveira, 2014).

Dicho MER es elaborado por el investigador para realizar su estudio y no necesariamente coincide con la OM de la que proviene, aunque se formula en términos próximos a esta y a la OM a enseñar. Este modelo tiene un carácter provisional, pues con fundamento en la Teoría de la Transposición Didáctica (Chevallard, 1989) no existe un sistema de referencia privilegiado desde el que se observe, analice y juzgue los saberes, pero se trata de una hipótesis de trabajo que es constantemente contrastada y revisada (Fonseca et al., 2014). Con fundamento en las cuestiones cruciales propuestas en los Modelos Epistemológico de Referencia (MER) se diseñó la AEI.

4.1 Descripción del curso en el que se implementó la AEI

El curso en el que se implementó fue la cohorte 2017 del grado noveno de educación secundaria en Bogotá. El grupo conformado por 39 estudiantes, cuyas edades oscilaban

entre los 14 y 16 años, y el profesor investigador –profesor del curso–. Este grupo en octavo año solo había estudiado las expresiones algebraicas y los polinomios, cuyas nociones son fundamentales para el desarrollo de la AEI propuesta.

Antes de implementar en el curso predominaba una enseñanza tradicional. El protagonista del proceso de estudio era el profesor; quien proponía las tareas, las técnicas y las validaba. Esto implica una reducción del tope de los estudiantes a hacer y decir lo que indica el profesor. Las clases se desarrollaron en 3 encuentros semanales –2 encuentros de 60 minutos y un encuentro de 120 minutos–, y los estudiantes se encontraban dispuestos en equipos de trabajo compuestos por 4 o 5 integrantes.

En la ejecución de la AEI, se trató de situar una dinámica de estudio en concordancia con el marco teórico adoptado en la investigación. Las clases se centraron en que los estudiantes propongán las técnicas para resolver las situaciones y que justifiquen sus producciones. A continuación a la resolución de cada situación, se realizaron discusiones de las propuestas dadas por cada grupo, lo que permitió confrontar las distintas resoluciones y evaluar las técnicas construidas. Los debates permitieron realizar una síntesis de lo aportado por los estudiantes y así institucionalizar los nuevos saberes reconstruidos.

4.2 Recolección de registros y análisis

En la implementación el profesor investigador tuvo carácter de observador participante. Se realizaron notas de campo antes y después de cada sesión. En todas las clases, el profesor proporcionó a los estudiantes las tareas a resolver y al finalizar cada sesión, recogió una de las producciones escritas por grupo. Se escanearon y se devolvieron a los estudiantes en la sesión inmediata siguiente, para asegurar la continuidad de su trabajo y que ellos dispongan permanentemente de sus registros. Para analizar los protocolos se los segmentó en episodios correspondientes a cada situación. En este trabajo se indican algunos resultados de la implementación de la AEI, y los efectos producidos los cursos habitados a la enseñanza demarcada por el paradigma de la monumentalización de los saberes.

5. Modelo epistemológico de referencia

Aquí se describe un bosquejo de un Modelo Epistemológico de Referencia (MER) en relación con la introducción de funciones en administración y economía, que se gesta a partir de la cuestión generatriz Q_0 : ¿Cómo determinar para qué ventas los ingresos de una empresa son mayores que los costos?

La idea central es modelizar los ingresos, costos y beneficios de una empresa mediante funciones que dependen de una única variable: «las ventas», y llevar a los

estudiantes al estudio de una desigualdad del tipo $f(x) \geq g(x)$. No se pedirá a los alumnos que determinen las funciones a partir de ciertas informaciones sobre la empresa, sino que el problema reside en determinar los valores de x para los que se cumple la desigualdad.

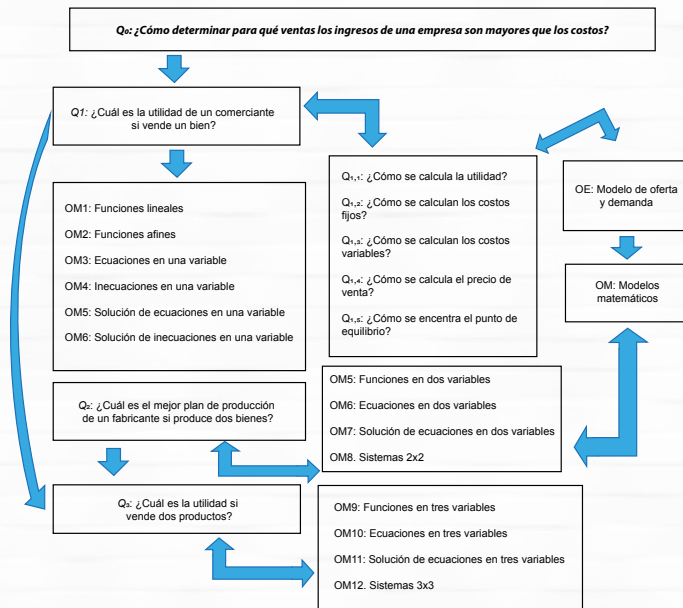
La praxeología matemática que permitirá dar respuesta a la cuestión inicial Q_0 puede considerarse como una articulación de tres praxeologías matemáticas puntuales que se estudian en secundaria:

- (1) *La resolución de ecuaciones* –lineales y cuadráticas, cúbicas con raíces enteras o racionales, logarítmicas o exponenciales muy sencillas–.
- (2) *La resolución de inecuaciones algebraicas* –de primer y segundo grado básicamente–.
- (3) *La representación gráfica de funciones elementales* –polinomios de grado ≤ 3 , funciones exponenciales y funciones racionales–.

El estudio de una cuestión viva Q_0 con fuerte poder generador capaz de imponer un gran número de cuestiones originarias de esta, es decir, la cuestión problemática que debe ser estudiada, y no se puede responder dando una simple información. El análisis de la cuestión Q_0 y de sus temas derivados conduce a la construcción de un gran número de saberes para dar respuesta argumentada en la construcción de OM, es decir, un conjunto de tareas, técnicas, definiciones, propiedades que permiten describir y justificar el trabajo realizado.

En la figura 1 se indican las posibles OM que integran al MER, junto a las relaciones que se establecen entre ellas.

Figura 1. Bosquejo del Modelo Epistemológico de Referencia (MER)



Fuente. Elaboración propia con base en Otero, 2013.

La elaboración de un MER del contenido matemático involucrado en el problema debe tomarse como hipótesis de trabajo y, como tales, son siempre provisionales y deben ser constantemente contrastados y revisados.

El MER es únicamente un «esqueleto matemático» que, como hemos dicho, toma la forma de una arborescencia de praxeologías matemáticas. Requerirá, por lo tanto, ser «encarnado» en actividades didácticas concretas que puedan realizar grupos de personas –alumnos y profesores– concretos bajo unas restricciones –temporales, materiales, etc.– particulares en el seno de una institución determinada (Serrano, 2013).

La hipótesis asumida es que en secundaria los alumnos son capaces globalmente de realizar, dentro de cada praxeología, los siguientes tipos de tarea (T):

T₁ Resolver ecuaciones de primer grado mediante manipulaciones algebraicas.

T₂ Resolver ecuaciones de segundo grado aplicando la fórmula del discriminante.

T₃ Resolver ecuaciones de tercer grado –solo si tienen una raíz racional– utilizando la técnica de factorización de Ruffini.

T₄ Resolver inecuaciones de primer grado mediante manipulaciones algebraicas y, en algunos casos, resolver inecuaciones polinómicas del tipo $(x - x_0) \cdot (x - x_1) \cdot \dots \cdot (x - x_n) \geq 0$, con x_0, x_1, \dots, x_n números racionales.

T₅ Dada una función elemental $f(x)$, buscar el dominio, puntos de corte con los ejes, intervalos de variación, etc. hasta llegar a la representación gráfica.

6. La actividad de estudio de investigación

Cuando los estudiantes preguntan: ¿Esto para qué me sirve? ¿Dónde voy a emplear esto? Sus preguntas encuadran en el enfoque tradicional que se ha dado a «la enseñanza de las matemáticas»: el enfoque enciclopédico, en el que

mientras más rellenemos el cerebro de los estudiantes con el conocimiento acumulado y estos lo repitan intachablemente, mejores alumnos serán (Otero *et al.*, 2013).

Enseñamos matemáticas descontextualizadas, ajenas al mundo real, olvidándonos que estas nacieron para resolver situaciones del mundo real. El desafío es precisamente: acercar las diversas situaciones familiares, del cotidiano a las situaciones que se analizan y resuelven en las aulas; inspirados en este argumento, la AEI propuesta se diseñó a partir de una situación familiar a los estudiantes del colegio distrital Friedrich Naumann como lo es la venta de confitería por parte de algunos estudiantes en el descanso pese a que el manual de convivencia lo prohíbe y además considerar los tipos de tarea que representan a *OM1* a *OMP6* en el MER.

Al seleccionar el curso para realizar la implementación, la primera dificultad fue disponer en la carga académica de aquel en que los estudiantes conocieran las nociones básicas de funciones para el estudio de las nociones que proponemos en la AEI. También, los tipos de tareas T_1 y T_2 se corresponden con los contenidos establecidos en el diseño curricular y acorde a los tiempos cronológicos propuestos que permitió el desarrollo de la investigación.

A continuación, se presentan las situaciones adaptadas de un seminario tomado por el profesor investigador en el ámbito del doctorado en Enseñanza de las Ciencias, Tandil Argentina, y algunos de los resultados de las producciones de estudiantes se presentarán en las situaciones 1 y 2.

6.1 Situación 1

Encargo 1: compra y venta informal de confitería.

Carolina es una estudiante del *Friedrich Naumann* que en el descanso vende informalmente² Bon Bon Bum a \$300 por unidad.

Carolina desea conocer cuáles son sus costos reales dado que:

1. En la distribuidora debe pagar por paquete \$3750 y cancelar el impuesto al valor agregado IVA.
2. Debe pagar dos transportes en el SITP –Sistema Integrado de Transporte Público de Bogotá– para ir y venir de la distribuidora.

Además, nos ha pedido si le podemos ayudar a determinar qué debe hacer para obtener los beneficios que desea y, en general, para mejorar la rentabilidad:

- a) ¿Qué debe hacer para obtener unos \$8000 de beneficio a la semana? ¿Debe subir el precio? ¿Cuánto?
- b) ¿Cómo saber cuánto pierde si le decomisan el 40 % de la mercancía y se le aplican las normas del manual de convivencia?

En esta primera situación se pretende concienciar a los estudiantes de la venta informal de confitería y las consecuencias convivenciales a las que se exponían en el

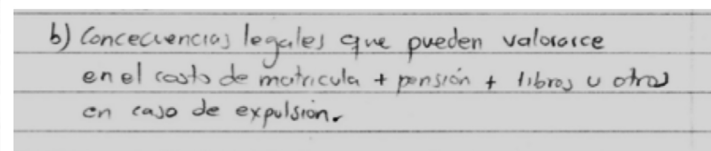
² Recordemos que por manual de convivencia en el capítulo VI. Seguimiento a las situaciones que afectan la convivencia escolar y el ejercicio de los derechos humanos, sexuales y reproductivos, numeral 15: comprar, vender o cambiar artículos dentro del plantel (p. 46). Los protocolos de los establecimientos educativos para la atención de las situaciones tipo II, a que se refiere el numeral 2 del Artículo 40 del Decreto 1965 de 2013.

manual de convivencia, además, de una posible pérdida de la mercancía por decomiso de algún porcentaje de esta. La estructura del encargo se mantuvo para los ocho grupos conformados –siete grupos de cinco estudiantes y un grupo de cuatro– pero a cada grupo se le asigna un producto de confitería diferente –chocolatinas, gomas, barriletes, etc.– y sus respectivos costos –fijos y variables–, y precio de venta.

En el estudio de esta primera situación el momento exploratorio es muy importante, ya que cada grupo centró su atención en buscar numéricamente las respuestas a las preguntas y no discutieron a fondo, por ejemplo, las consecuencias del decomiso, solo dos grupos lo hicieron y lo dejaron por escrito. En esta actividad utilizamos una sesión de una hora, y para la exposición en plenaria de todos los grupos, tres horas en dos sesiones.

En particular, el grupo 2 y el grupo 4 en sus producciones dejaron por escrito la pregunta *¿Cómo saber cuánto pierde si le decomisan el 40 % de la mercancía y se le aplican las normas del manual de convivencia?* En la figura 2 manifiestan la opinión de algún estudiante que proviene de un colegio privado, ya que dentro de las consecuencias que sugiere está el aumento de la matrícula –en los colegios públicos no se cancela matrícula, pensión ni libros–, y la posible expulsión del establecimiento educativo; en la figura 3 el grupo 4 escribe el total de la pérdida sin presentar procedimiento, y frente al conocimiento del manual de convivencia manifiestan que le decomisarán el producto y le realizarán una anotación en el observador del alumno.

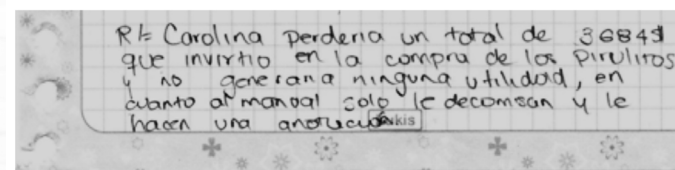
Figura 2. Resolución situación 1. B grupo 2



b) Consecuencias legales que pueden valorarse en el costo de matrícula + pensión + libros u otras en caso de expulsión.

Fuente. Protocolo estudiante del grupo 2.

Figura 3. Resolución situación 1. B grupo 4



Rt Carolina perdería un total de 36843 que invirtió en la compra de los Pirellinos y no generaría ninguna utilidad, en cuanto al manual solo le decomisan y le hacen una anotación en el observador.

Fuente. Protocolo estudiante del grupo 4.

En las respuestas anteriores se ve que en el grupo 4 algún estudiante ya había vendido confitería, y como lo afirma el grupo, «solo le hacen una anotación y le decomisan la mercancía». En cuanto a las dos primeras preguntas ningún grupo asignó una letra para la variable ni planteó ninguna ecuación, en particular el grupo 1, escribe algunas letras y llega a escribir la utilidad en términos de ingresos menos costos, pero no hace uso explícito de lo escrito, además olvidan sacar el IVA y toman el valor del transporte como un costo variable y el valor del producto como un costo fijo. Se encuentra carente de justificación.

En la figura 4 el grupo 5 escribe algunas expresiones algebraicas, usando letras sin especificar su significado, pero se evidencia algún dominio de la notación para los costos fijos, costos variables, precio y cantidad del producto, sin embargo, no evidencian procedimientos.

Figura 4. Resolución situación 1. Grupo 5 preguntas 1 y 2

$I = P \cdot Q$ $U = I - C_T$
 $C_F = 8.526$
 $C_V = 9.000$
 $P = 150$
 $Q = 100$
 $C_T = 12.526$
 $I = 15.000$
 $U = 2.474$

Fuente. Protocolo estudiante del grupo 5.

Se destaca que en general, los estudiantes tienen un dominio aritmético de la situación, y si bien es cierto que alguno maneja el término utilidad, no hay un dominio prealgebraico como tal.

6.2 Situación 2

Q_0 : ¿Cómo determinar para qué ventas los ingresos de una empresa son mayores que los costos?

Q_1 : ¿Para qué ventas los ingresos de una empresa son mayores que los costos, si las funciones de ingreso y costo son afines?

Encargo 2: compra y venta formal de confitería.

Carolina es una estudiante del *Friedrich Naumann* que en el descanso vendía ilegalmente Bon Bon Bum, pero ahora quiere hacerse cargo de la tienda escolar y ha hablado con la

rectora del colegio, solicitó en arriendo³ el sitio asignado para la tienda escolar, conciliando un canon mensual de \$300.000. La distribuidora le lleva el producto al colegio y debe pagar por paquete \$3.750 y cancelar el impuesto al valor agregado IVA.

Ella desea mantener el precio de venta en \$300 y nos ha pedido ayuda para determinar:

¿Qué ventas se pueden prever durante los próximos meses para su producto?⁴ Presentar una fórmula que permita calcular las previsiones y justificarla explicando las garantías y limitaciones de cada propuesta.

Nos ha facilitado información de los últimos meses de otra tienda escolar, en la tabla 1 y en las figuras 5 y 6 se evidencia la información.

Tabla 1. Datos tienda escolar de otro colegio similar

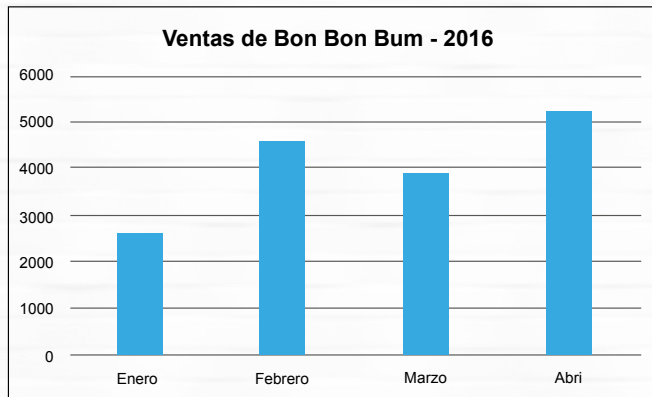
	Enero	Febrero	Marzo	Abril
Bon Bon Bum vendidos	2.600	4.576	3.900	5.200
Ingresos	780.000	1'372.800	1'170.000	1'560.000
Costos Totales	771.250	1'129.400	1'006.875	1'242.500
Ganancias	8.750	243.400	163.125	317.500

Fuente. Elaboración propia.

³ Recordemos que hay una normativa especial para la contratación de espacios en el sector público.

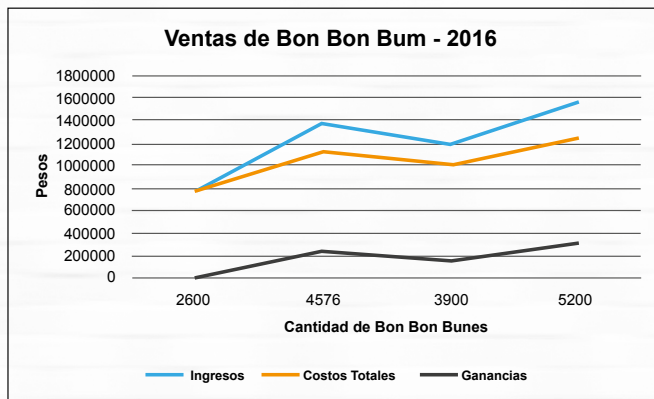
⁴ Para simplificar la pregunta general nos limitamos a un solo producto, antes de complejizar el problema en varias variables.

Figura 5. Gráfica de ventas de otra tienda similar



Fuente. Elaboración propia.

Figura 6. Gráfica de ventas de otra tienda similar

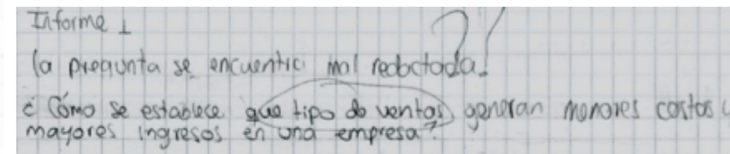


Fuente. Elaboración propia.

Para la situación 2, se dio a conocer la pregunta generatriz Q_0 y antes de proseguir, se indagó si era comprensible la pregunta o si por el contrario era necesario cambiarla, si la pregunta tiene respuesta inmediata o se debería realizar un estudio de la situación. Estos son algunos resultados:

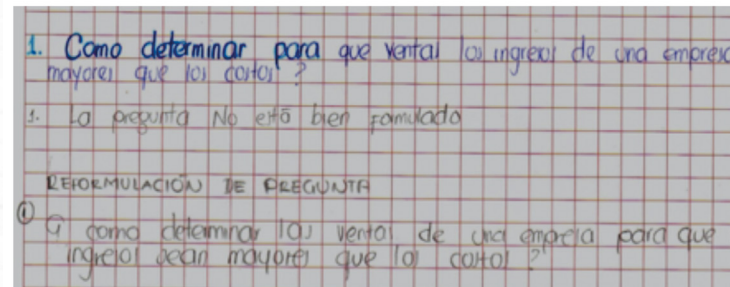
En las figuras 7 y 8 los grupos 1 y 6 escriben que la pregunta Q_0 : ¿Cómo determinar para qué ventas los ingresos de una empresa son mayores que los costos?, está mal redactada y para el grupo 1 (Figura 7) esta debería ser escrita así: ¿Cómo se establece qué tipo de ventas generan menores costos y mayores ingresos en una empresa? Para el grupo 6 (figura 8) se debería reformular así: ¿Cómo determinar las ventas de una empresa para que los ingresos sean mayores que los costos?

Figura 7. Grupo 1, situación 2



Fuente. Protocolo estudiante del grupo 1.

Figura 8. Grupo 6, situación 2



Fuente. Protocolo estudiante del grupo 6.

Los grupos 7 y 8 no encuentran dificultad en la pregunta, reconocen que la pregunta generatriz no tiene respuesta inmediata y sugieren revisar primero lo que significa «ingreso», «costos» y «ventas», como se muestra en la figura 9 y 10.

Figura 9. Grupo 7, situación 2

Para poder hacer un análisis correcto, primero debemos saber que significan los ingresos, los costos y las ventas para una empresa.

Fuente. Protocolo estudiante del grupo 7.

Figura 10. Grupo 8, situación 2

Conclusion: No se puede dar una respuesta inmediata.
 - se requiere plantear como mínimo las anteriores 3 p
 - se puede identificar que la empresa tiene pérdidas ha identificado.

Fuente. Protocolo estudiante del grupo 8.

Los estudiantes reconocen que la pregunta no tiene respuesta inmediata, y que deben resolver otras preguntas, como se muestra en la figura 11.

Figura 11. Grupo 7, situación 2, preguntas por resolver primero

OTRAS PREGUNTAS:

1. Como se determina el costo de producción
2. Como se determina el costo de las ventas
3. Que es el ingreso
4. Que son las ventas

Fuente. Protocolo estudiante del grupo 7.

Para la siguiente sesión a los estudiantes se les dio la posibilidad de llevar el problema a su casa e indagar posibles respuestas entre sus familiares cercanos. Estos fueron los resultados:

En la figura 12 que corresponde al grupo 1, se observan fórmulas para los costos totales, ingreso y utilidad usando letras de uso en administración y economía, y un gráfico de oferta y demanda como evidenciando un procedimiento a seguir, incluso llegan a plantear una inecuación, pero no están explícitos los procedimientos técnicos de solución.

Figura 12. Grupo 1, situación 2, análisis de la situación

¿Como determinar en que nivel de ventas los ingresos de una compañía son mayores que los costos?

$$C_T = C_v + C_f$$

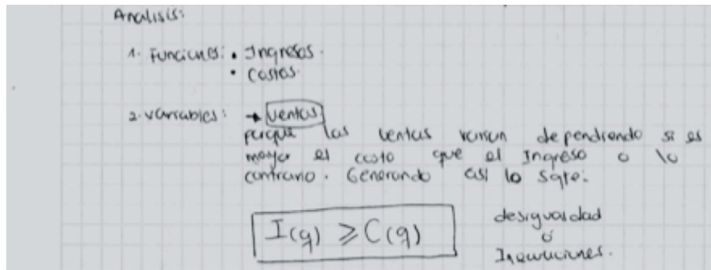
$$I = Pq$$

Utilidad: $I_T - C_T$
 $\rightarrow I(q) \geq C(q)$

Fuente. Protocolo estudiante del grupo 1.

En la figura 13 el grupo 6, luego de su investigación en casa, identifica que para su análisis debe identificar primero las funciones de ingreso y costos, también identifica que la variable que se debe estudiar son las ventas y escriben la desigualdad que se debe resolver, $I(q) \geq C(q)$, pero no hay un procedimiento técnico como tal.

Figura 13. Grupo 6, situación 2, análisis de la situación



Fuente. Protocolo estudiante del grupo 6.

En este protocolo los estudiantes emplean términos adecuados para dar respuesta, pero se encuentra carente de justificación. Esto es atribuible a la corta experiencia escolar de los estudiantes en torno al estudio de la función, ya que como se mencionó anteriormente, no habían abordado el concepto de función en su currículo, sin embargo, la respuesta obtenida de los estudiantes fue satisfactoria. Se observa que responden a las preguntas como si se tratara de una petición de información del profesor. No se evidencia la necesidad de justificar las respuestas si no es por insistencia del profesor. Esto se logró en las instancias donde se expusieron y discutieron las respuestas aportadas por los diferentes grupos.

Como se evidencia en las producciones de los estudiantes, se notaban carentes de elementos tecnológicos explícitos, por lo que en las instancias de discusión se necesitaron constantes intervenciones del profesor para que los estudiantes los indicaran.

Para facilitar algunos procesos algebraicos en los que se observó gran dificultad se adoptó el uso de la herramienta tecnológica TIC *GeoGebra*, lo que facilitó los tipos de tareas T_2 a T_5 .

Al fusionar la modelación con el uso de la tecnología TIC mediante la simulación, se obtienen espacios o entornos interactivos en el que se promueve el desarrollo de conocimientos y habilidades del pensamiento científico en los estudiantes (Oliveira, 2015); por lo que se presenta el uso de un software matemático libre, gratuito y de código abierto, en este caso *GeoGebra*, siendo una herramienta efectiva para la visualización de representaciones, construcción de algoritmos, elaboración de simulaciones, permitiendo tratar diversos contenidos en matemáticas a través del uso de simuladores en un ambiente dinámico e interactivo (Gómez, 2011).

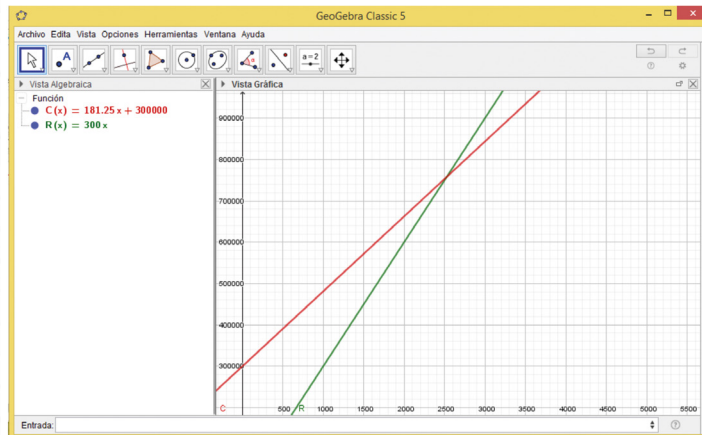
Con la entrada de *GeoGebra*, se dedicó una sesión de una hora para revisar el manejo básico de la herramienta y familiarizarse con las *tablet*. Luego de las puestas en común de las respuestas de los grupos, se validan los siguientes resultados particulares para el grupo 1, dado que los otros grupos tienen un producto diferente.

La situación sugiere una función de ingresos $R(x)=300x$ y luego de discutir la función de costo total en el sentido de si la variable estaba representada por paquetes del producto o por unidades, se llega al concepto de costo promedio y se toma la variable en unidades, quedando función de costos totales de $C(x)=181,25x+300000$ y se grafican en un mismo plano cartesiano.

En la figura 14 se discute el significado de las pendientes de las rectas, los puntos de corte con los ejes y el dominio de las funciones, acordando restringir el dominio de las funciones a $[0, \infty)$, e investigar el punto de corte de las dos rectas, nos enfrentamos a sistemas de ecuaciones 2×2 y los métodos de solución, por lo cual se tiene que realizar una salida del tema para introducir sistemas de ecuaciones.

El análisis gráfico permite observar que antes del punto de corte los costos totales son mayores que los ingresos, y después de dicho punto los ingresos son mayores que los costos, como se sugirió en la figura 13.

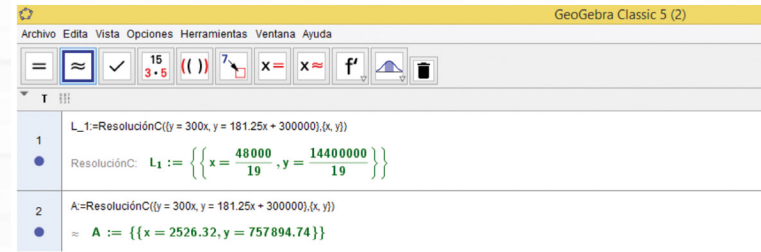
Figura 14. Función de ingresos y función de costos totales



Fuente. Elaboración propia en GeoGebra Classic 5.

Una vez los estudiantes han investigado sobre los sistemas de ecuaciones 2×2 y sus métodos de solución, se procede a solucionar el sistema 2×2 propuesto en la situación con la ayuda de GeoGebra y la ventana de cálculo simbólico CAS, como se muestra en la siguiente figura:

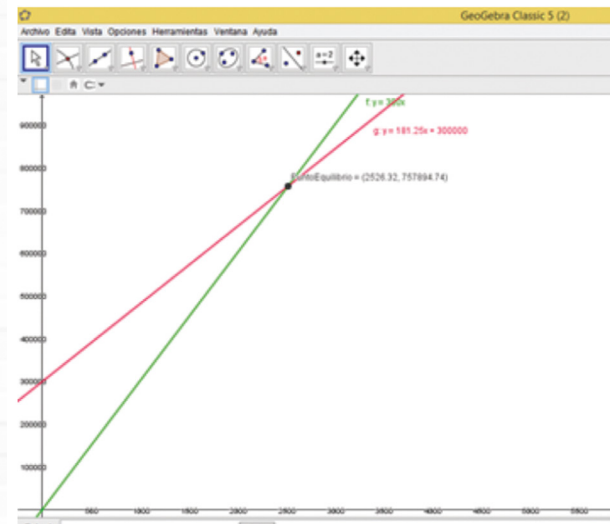
Figura 15. Solución de sistema de ecuaciones



Fuente. Elaboración propia en GeoGebra Classic 5.

Con esta información y las indagaciones de los estudiantes, se formaliza el punto de equilibrio de la situación planteada y se grafica la solución de la siguiente manera:

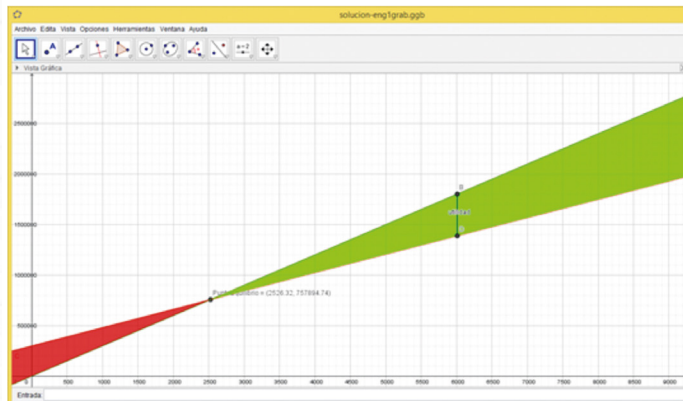
Figura 16. Punto de equilibrio



Fuente. Elaboración propia en GeoGebra Classic 5.

En la figura 17 resolvemos gráficamente las inecuaciones y se discute el lugar geométrico donde hay pérdidas y donde hay utilidades:

Figura 17. Solución gráfica de inecuaciones



Fuente. Elaboración propia en GeoGebra Classic 5.

En el colegio otro curso de noveno recibía las clases de la manera clásica, los estudiantes fueron perdiendo la motivación por el trabajo y cada vez producían menos, razón por la cual se dio por terminado el estudio, también por falta de apoyo de la institución, quedó pendiente para una futura implementación simular la situación, es decir, introducir los deslizadores que tiene *GeoGebra*, convertir todos los parámetros en variables y observar todas las posibles situaciones que se presentan. También dentro de la AEI se pueden realizar modificaciones a la situación problema y llevar a los estudiantes al estudio de otras funciones, como polinómicas de grados dos, tres y funciones exponenciales y logarítmicas que están dentro del plan de estudio de noveno grado de secundaria.

7. Conclusiones

Se cumplió el objetivo educativo con la introducción de la noción de función, mediante la aplicación de dos situaciones didácticas en administración y economía, cercana a los estudiantes, ya que varios de ellos venden informalmente confitería en el colegio y es posible manipular el modelo de oferta y demanda de un producto. Por otro lado, se ha realizado un pequeño aporte al objetivo didáctico de matematizar las matemáticas como herramienta que permite articular y dar sentido a la matemática escolar.

La Teoría Antropológica de lo Didáctico – TAD, sirvió como referente para elaborar y describir de manera muy primaria las características de un MER con relación a las funciones lineales, y se usó como base para el diseño de la AEI implementada por primera vez en un curso de noveno grado de secundaria en un colegio distrital de Bogotá, acostumbrado al estudio de la matemática de manera tradicional, y permite abordar el problema didáctico de la educación matemática, sobre todo en estos grupos acostumbrados a recibir la clase del profesor de matemáticas como un objeto ya creado e incuestionable, lo que Chevallard (2013a) ha llamado metafóricamente como «monumentalización del saber».

La TAD nos invita a abandonar las clases catedráticas en donde se enseñan las matemáticas descontextualizadas, ajenas al mundo real, olvidándonos que las matemáticas nacieron para resolver situaciones del mundo real. El desafío es precisamente acercar las diversas situaciones familiares del cotidiano a las situaciones que se analizan y resuelven en las aulas, identificando un problema en la realidad o entorno de los estudiantes, modelar matemáticamente el problema,

identificar el contenido matemático de aplicación pertinente MER, resolver el problema matemático y, finalmente, permitir que los estudiantes desarrollen la habilidad de emplear las matemáticas en la vida diaria, para lograr que participe de forma plena y competente en el mundo real.

La herramienta *GeoGebra* permitió acelerar el proceso de construcción de modelos de funciones, el uso de TIC en el aula de clase, sistemas de ecuaciones y la resolución de estos fortaleciendo un aprendizaje significativo. Es importante no abandonar el lápiz y el papel, ya que a los estudiantes se les dificulta el manejo algebraico y en los exámenes de Estado e ingreso a la universidad no es permitido el uso de estas herramientas.

Con este trabajo de investigación desarrollado parcialmente, ya que no se alcanzaron los tres niveles de modelización algebraico-funcional (Ruiz, 2010), se contribuye al estudio de la matematización de las matemáticas, como proceso clave para comprender la relación de las matemáticas y la realidad, con la solución de problemas reales, cercanos al entorno de los estudiantes y con el uso de herramientas computacionales que propician un mejor aprendizaje en el estudiante, porque permite trabajar simultáneamente varios procesos cognitivos.

Se espera implementar la situación nuevamente en la escuela secundaria o en un curso de matemáticas en la universidad, y alcanzar los tres niveles de modelización algebraico-funcional (Ruiz, 2010), abordando familias de funciones y tomando la función como herramienta de modelización.

Referencias

- Chevallard, Y. (1989). *On Didactic Transposition Theory: Some Introductory Notes*. Recuperado de http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=122
- Chevallard, Y. (1999). El análisis de las prácticas docentes en la teoría antropológica de lo didáctico. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19(2), 221-266.
- Chevallard, Y. (2004). *Vers une didactique de la codisciplinarité. Notes sur une nouvelle épistémologie scolaire*. Recuperado de <http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/index.php>
- Chevallard, Y. (2005). *La place des mathématiques vivantes dans l'éducation secondaire: transposition didactique des mathématiques et nouvelle épistémologie scolaire*. Recuperado de http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/rubrique.php3?id_rubrique=4
- Chevallard, Y. (2007). *Passé et présent de la théorie anthropologique du didactique*. Recuperado de http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/rubrique.php3?id_rubrique=8
- Chevallard, Y. (2009a). *Didactique et formation des enseignants*. Recuperado de http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/rubrique.php3?id_rubrique=8
- Chevallard, Y. (2009b). *La notion d'ingénierie didactique, un concept à refonder. Questionnement et éléments de réponse à partir de la TAD*. Recuperado de http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/rubrique.php3?id_rubrique=8
- Chevallard, Y. (2013a). *Journal du seminaire TAD/IDD*. Recuperado de <http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/journal-tad-idd-2012-2013-1.pdf>

- Chevallard, Y. (2013). *La matemática en la escuela: por una revolución epistemológica y didáctica*, (1.a ed.). Buenos Aires, Argentina: Libros del Zorzal.
- Fonseca, C., Gascón, J., y Oliveira, C. (2014). Desarrollo de un modelo epistemológico de referencia en torno a la modelización funcional. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, RELIME*, 17(3), 289-318.
- Gómez, I. M. (2011). *Modelización matemática en contextos tecnológicos. Usos del GeoGebra*. Madrid: Catedra Miguel de Guzmán, Universidad Complutense de Madrid.
- Juárez, B., y Limón, O. (2013). Las matemáticas y el entorno socioeconómico como causa de deserción escolar en el nivel medio superior en México. *Multidisciplina*, 15, 72-90.
- Ministerio de Educación Nacional - MEN. (2006). *Estándares básicos de competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas*. Bogotá, Colombia: Imprenta Nacional de Colombia.
- Oliveira, C. (2015). *Ventajas técnicas del Geogebra en el desarrollo de la modelización funcional y del Cálculo Diferencial en secundaria*. *Sensos*, II(1). Recuperado de <http://sensos-e.ese.ipp.pt/?p=8023>
- Otero, M.; Fanaro, M.; Corica, A.; Llanos, V.; Sureda, P. y Parra, V. (2013). *La teoría antropológica de lo didáctico en el aula de matemática*. Buenos Aires: Dunken.
- Ruiz, N. (2010). *La introducción del álgebra elemental y su desarrollo hacia la modelización funcional*. (Tesis doctoral). Universidad Autónoma de Barcelona.
- Serrano, L. (2013). *La modelización matemática en los estudios universitarios de economía y empresa: análisis ecológico y propuesta didáctica*. (Tesis doctoral). Barcelona, España.